Examen d'Analyse IV

Questions de cours : (2 +2)

- Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

- Donner la définition d'une courbe paramétrée.

Exercice 1 : (1+1+1)

Une fonction $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dite propre si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, l'image réciproque $f^{-1}(K)$ est compact.

1. Soit $(x_n)_n$ une suite de $\mathbb{R}^n$ tel que : $x_n \longrightarrow x \in \mathbb{R}^n$, Montrer que l'ensemble $K = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.
2. En déduire que si f est propre alors l'image par f de tout fermé de $\mathbb{R}^n$ est un fermé.
3. Établir l'équivalence suivant :

$$f \text{ est propre } \Leftrightarrow \lim_{\|x\|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty} \|f(x)\|_{\mathbb{R}^n} = +\infty$$

Exercice 2 : (2+1)

On poser $f(x,y) = \sin x - e^y + e^{-y}$

1. Montrer que $f(x,y) = 0$ est explicitable au voisinage de 0 par une fonction $y = g(x)$ et calculer $g(0)$.
2. Calculer $g'(0)$.

Exercice 3 : (2+2)

Soit $\begin{array}{rcl} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t & \longrightarrow f(t) = (t^3 + 3t^2, t^4 - t^2) \end{array}$

1. Déterminer les points stationnaires.
2. Déterminer les équations des tangentes au points $M(0)$ et $M(1)$.

Exercice 4 : (2+2)

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longrightarrow & x^3 + y^3 - 9xy + 27 \end{array}$$

1. Trouver les points critiques de f .
2. Parmi ces points, lesquels sont des extremums locaux ?

Exercice 5 : (1+1)

Dans $\mathbb{R}^2$, on considère le domaine D delimité par les deux courbes $x = \frac{y^2}{4}$ et $y = 2x$.

1. Calculer $\mathcal{A}(D)$ l'aire du domaine D .
2. Calculer l'intégral :

$$\iint_D x - y \, dxdy$$

Rédigé par OmAr REBAHI